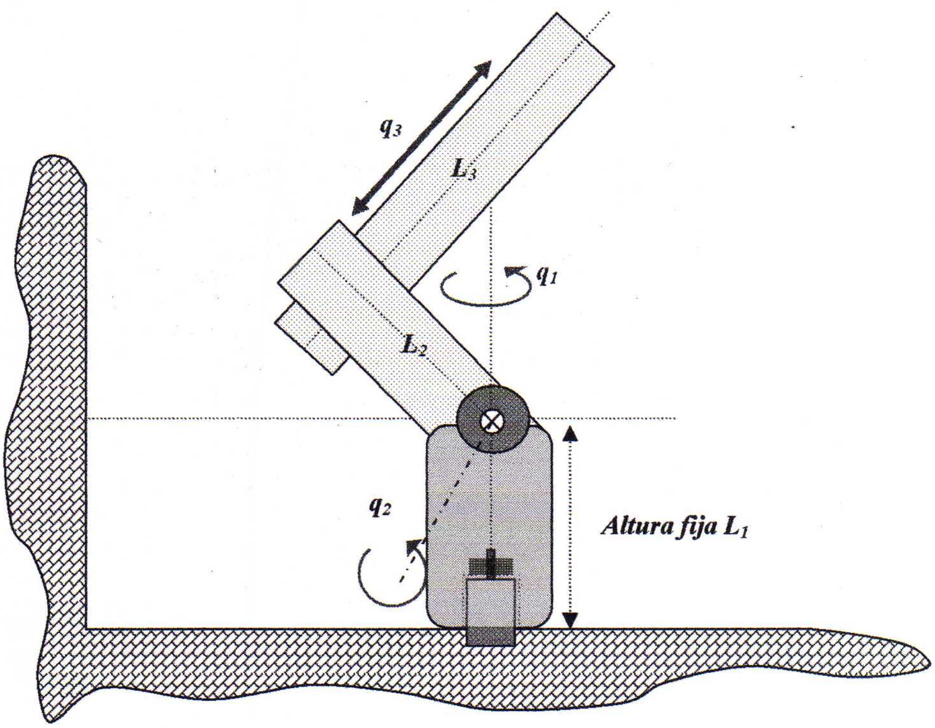
Nombre:
Carnet:

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
ROBOTICA
EC-3514

Sartenejas, 03 de Julio de 2001

2DO QUIZ

1) La figura anexa presenta un diagrama esquemático de un Robot Antropomorfo modificado, al cual se le ha cambiado una de sus articulaciones por una articulación traslacional; Si consideramos que los cuerpos son uniformes y simétricos (centro de masa en el centro geométrico del cuerpo) y los cuerpos tienen masas m_1, m_2 y m_3, encuentre:
   a) La expresión del Lagrangiano del Robot manipulador
   b) Determine la expresión del par de articulación cuando el robot se encuentra en equilibrio (no hay movimiento) (Observación: No es necesario determinar toda la ecuación de movimiento...)

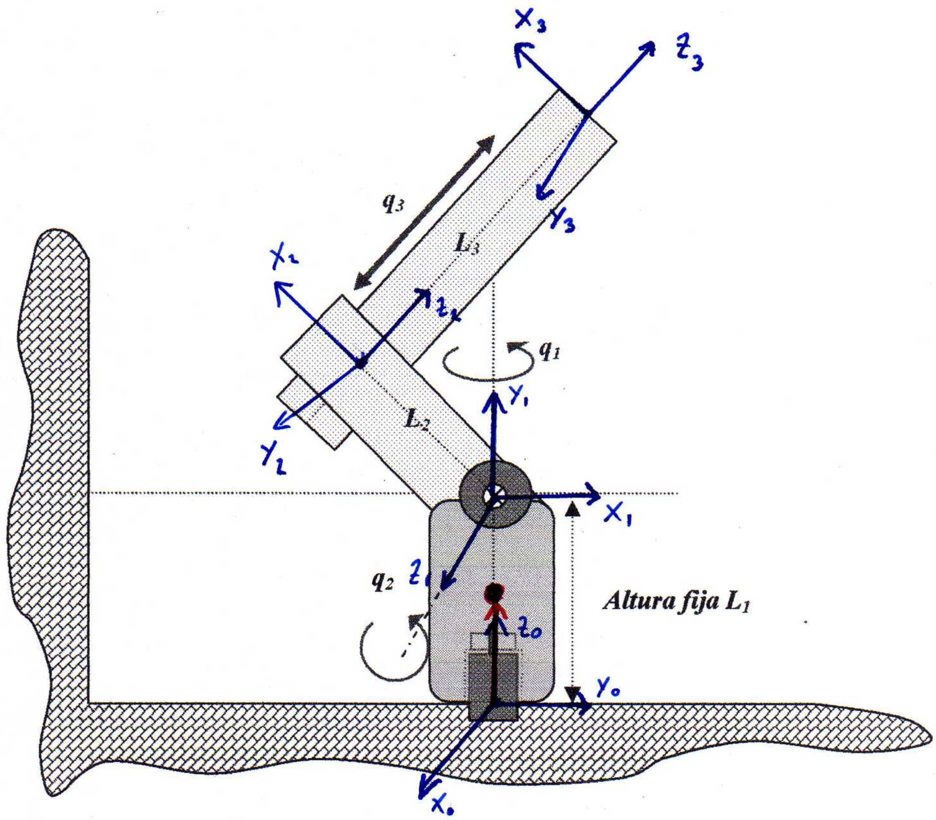


(a) Para calcular el Lagrangiano es necesario calcular K_1, K_2 y K_3, y U_1, U_2 y U_3.
Luego $L = K_1 + K_2 + K_3 - U_1 - U_2 - U_3$.

(b) Cuando no hay movimiento $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$; $K_1 = K_2 = K_3 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{Q_i = +\frac{\partial}{\partial q_i}\left(U_1 + U_2 + U_3\right)}$$

Para ejercitar el cálculo de las ecuaciones dinámicas, supongamos que el manipulador no está en equilibrio. Calculamos $Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$



$\vec{r}_1 = \frac{L_1}{2}\vec{K}_0$ $\qquad\qquad$ $\vec{V}_1 = \dot{\vec{r}}_1 + \vec{W}_1 \times \vec{r}_1$

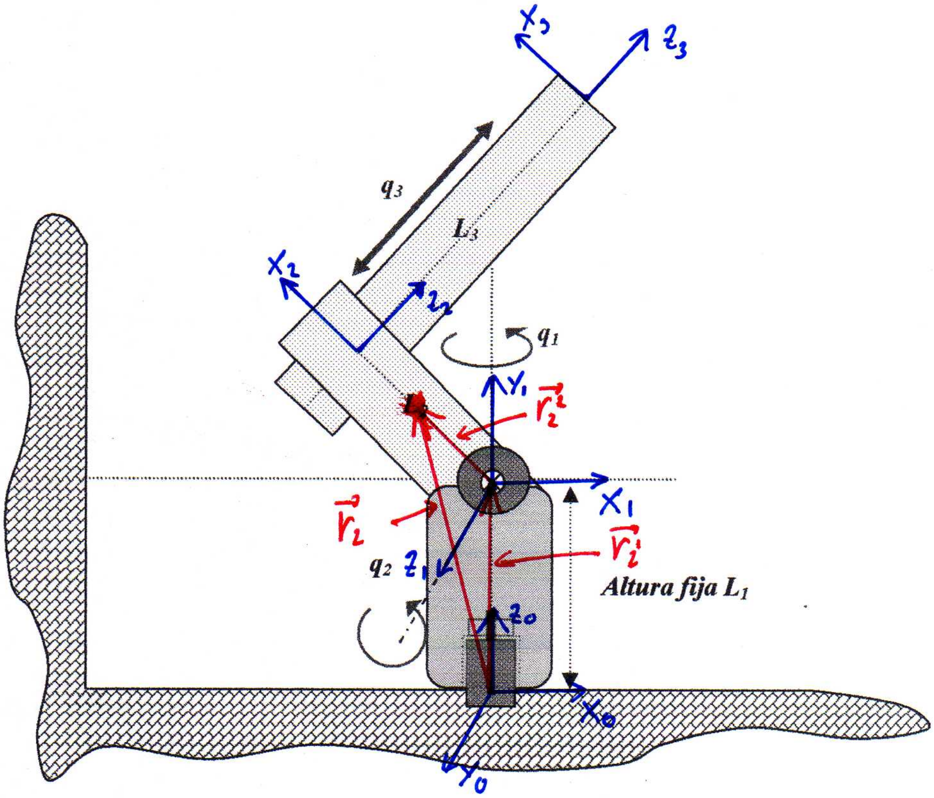
$\vec{W}_1 = \dot{q}_1 \vec{K}_0$ $\qquad\qquad$ $\vec{V}_1 = \vec{\emptyset} + \dot{q}_1 \vec{K}_0 \times \frac{L_1}{2}\vec{K}_0 = \vec{\emptyset}$

$\cancel{K_1 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{r}_1|^2 + \vec{W}_1 \times}$

$$K_1 = \cancelto{0}{\frac{1}{2} m_1 |\vec{V}_1|^2} + \frac{1}{2}\vec{W}_1^T I \vec{W}_1$$

$$K_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{1}{2} I_{zz_1}^{(0)} \dot{q}_1^2}$$

$$U_1 = m_1 g h_1 \Rightarrow \boxed{U_1 = m_1 g \frac{L_1}{2}}$$



$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2^{\,1} + \vec{r}_2^{\,2}$$

$$\vec{r}_2 = L_1 \vec{k}_0 + \frac{L_2}{2}\left(+\vec{i}_2\right)$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{q}_1 \vec{k}_0 + q_2 \vec{k}_1$$

Llevando todo al S.R 1

$$\vec{k}_0 = +\vec{j}_1$$

$$\vec{i}_2 = cq_2 \vec{j}_1 + sq_2\left(-\vec{i}_1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = L_1 \vec{j}_1 + \frac{L_2}{2}\left(cq_2 \vec{j}_1 + sq_2\left(-\vec{i}_1\right)\right)$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{q}_1 \vec{j}_1 + \dot{q}_2 \vec{k}_1$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{L_2}{2} sq_2 \cdot \dot{q}_2\left(-\vec{j}_1\right) + \frac{L_2}{2} cq_2 \dot{q}_2 \left(-\vec{i}_1\right)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{L_2}{2} \dot{q}_2 \left(sq_2\left(-\vec{j}_1\right) + cq_2\left(-\vec{i}_1\right)\right)$$

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_2^{\,1} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2^{\,2}$$

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \cancelto{0}{\dot{q}_1 \vec{j}_1 \times L_1 \vec{j}_1} + \left(\dot{q}_1 \vec{j}_1 + \dot{q}_2 \vec{k}_1\right) \times \frac{L_2}{2}\left(cq_2 \vec{j}_1 + sq_2(-\vec{i}\right.$$

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \frac{L_2}{2}\left[\dot{q}_1\left(\cancelto{0}{cq_2 \vec{j}_1 \times \vec{j}_1} + sq_2 \vec{j}_1 \times \left(-\vec{i}_1\right)\right) + \dot{q}_2\left(cq_2 \vec{k}_1 \times \vec{j}_1 + sq_2 \vec{k}_1 \times (-\vec{i}\right.\right.$$

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \frac{L_2}{2}\left(\dot{q}_1 sq_2 \vec{k}_1 + \dot{q}_2 cq_2\left(-\vec{i}_1\right) + \dot{q}_2 sq_2\left(-\vec{j}_1\right)\right)$$

$$\vec{V}_2 = \dot{\vec{r}}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$$

$$\vec{V}_2 = L_2 \dot{q}_2 cq_2\left(-\vec{i}_1\right) + L_2 \dot{q}_2 sq_2\left(-\vec{j}_1\right) + \frac{L_2}{2} \dot{q}_1 sq_2 \vec{k}_1$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 |\vec{V}_2|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_2^T I_2 \vec{\omega}_2$$

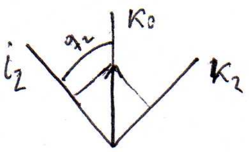
$$\vec{\omega}_2^T I_2 \vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_2}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = I_{yy_2}^{(1)} \dot{q}_1^2 + I_{zz_2}^{(1)} \dot{q}_2^2$$

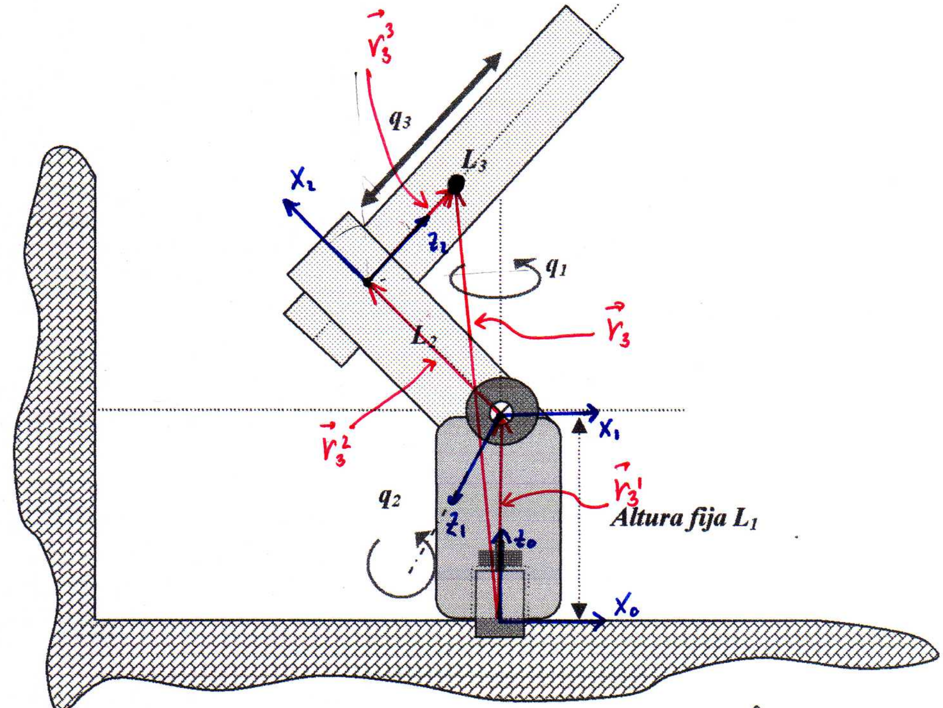
$$\vec{K}_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(L_2^2 \dot{q}_2^2 C^2 q_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 S^2 q_2 + \frac{L_2^2}{4} \dot{q}_1^2 S^2 q_2 \right) + \frac{1}{2} I_{yy_2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz_2} \dot{q}_2^2$$

$$\vec{K}_2 = \frac{1}{2}\left(m_2 \frac{L_2^2}{4} S^2 q_2 + I_{yy_2}\right)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 L_2^2 + I_{zz_2}\right)\dot{q}_2^2$$

$$\boxed{U_2 = m_2 g \left(L_1 + \frac{L_2}{2} C q_2\right)}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{1}{2}\left[\left(m_2 \frac{L_2^2}{4} S^2 q_2 + I_{yy_2}\right)\dot{q}_1^2 + \left(m_2 L_2^2 + I_{zz_2}\right)\dot{q}_2^2\right]}$$





$$\vec{r}_3 = \vec{r}_3^{\,1} + \vec{r}_3^{\,2} + \vec{r}_3^{\,3}$$

$$\vec{r}_3 = L_1 \vec{k}_0 + L_2 \vec{i}_2 + \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}_3 = \dot{q}_1 \vec{k}_0 + \dot{q}_2 \vec{k}_1$$

Llevemos todo al S.R. 2

$$\vec{k}_0 = c q_2 \vec{i}_2 + s q_2 \vec{k}_2$$

$$\vec{k}_1 = \vec{j}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_3 = \left(L_1 c q_2 + L_2\right)\vec{i}_2 + \left(L_1 s q_2 + q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}_3 = \dot{q}_1 c q_2 \vec{i}_2 + \dot{q}_2 \vec{j}_2 + \dot{q}_1 s q_2 \vec{k}_2$$

$$\dot{\vec{r}}_3 = L_1 s q_2 \dot{q}_2 \left(-\vec{i}_2\right) + \left(L_1 c q_2 \dot{q}_2 + \dot{q}_3\right) \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_3^{\,1} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_3^{\,2} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3^{\,3}$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 = \cancelto{0}{\dot{q}_1 \vec{k}_0 \times L_1 \vec{k}_0} + \left(\dot{q}_1\left(c q_2 \vec{i}_2 + s q_2 \vec{k}_2\right) + \dot{q}_2 \vec{j}_2\right) \times L_2 \vec{i}_2 + \left(\dot{q}_1\left(c q_2 \vec{i}_2 + s q_2 \vec{k}_2\right) + \dot{q}_2 \vec{j}_2\right) \times \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 = \cancelto{0}{L_2 \dot{q}_1 c q_2 \vec{i}_2 \times \vec{i}_2} + L_2 \dot{q}_1 s q_2 \vec{k}_2 \times \vec{i}_2 + \dot{q}_2 L_2 \vec{j}_2 \times \vec{i}_2 + \dot{q}_1 c q_2 \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{i}_2 \times \vec{k}_2 + \cancelto{0}{\dot{q}_1 s q_2 \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{k}_2 \times \vec{k}_2} + \dot{q}_2 \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{j}_2 \times \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 = \dot{q}_2\left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) \vec{i}_2 + \left(L_2 \dot{q}_1 s q_2 - \dot{q}_1 c q_2 \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right)\right) \vec{j}_2 + \dot{q}_2 L_2 \left(-\vec{k}_2\right)$$

$$\left|\vec{V}_3\right|^2 = \dot{\vec{r}}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3$$

$$\left|\vec{V}_3\right|^2 = \left(\dot{q}_2\left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right) - L_1 \dot{q}_2 s q_2\right) \vec{i}_2 + \left(L_2 \dot{q}_1 s q_2 - \dot{q}_1 c q_2 \left(q_3 - \frac{L_3}{2}\right)\right) \vec{j}_2 + \left(L_1 c q_2 \dot{q}_2 + \dot{q}_3 - \dot{q}_2 L_2\right) \vec{k}_2$$

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 \, |\vec{V}_3|^2 + \frac{1}{2} \, \omega_3^T \, I_3^{(2)} \omega_3$$

$$|\vec{V}_3|^2 = \left(\dot{q}_2 \left(q_3 - l_3/2\right) - l_1 \, \dot{q}_2 \, s q_2\right)^2 + \left(L_2 \, \dot{q}_1 \, s q_2 - \dot{q}_1 \, c q_2 \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right)\right)^2$$
$$+ \left(l_1 \, c q_2 \, \dot{q}_2 + \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \, L_2\right)^2$$

$$\vec{\omega}_3^T \cdot I_3 \, \vec{\omega}_3 = \cancel{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 c q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 s q_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 c q_2 & \dot{q}_2 & \dot{q}_1 s q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_3}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 c q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 s q_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_3^T I_3 \, \vec{\omega}_3 = I_{xx_3}^{(2)} \, \dot{q}_1^2 \, c^2 q_2 + I_{yy_3}^{(2)} \, \dot{q}_2^2 + I_{zz_3}^{(2)} \, \dot{q}_1^2 s^2 q_2$$

$$\boxed{K_3 = \frac{1}{2} m_3 \left[\left(\dot{q}_2 \left(q_3 - l_3/2\right) - l_1 \dot{q}_2 \, s q_2\right)^2 + \left(l_2 \, \dot{q}_1 \, s q_2 - \dot{q}_1 \, c q_2 \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right)\right)^2 + \left(l_1 \, c q_2 \, \dot{q}_2 + \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \, l_2\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(I_{xx_3}^{(2)} \, \dot{q}_1^2 \, c^2 q_2 + I_{yy_3}^{(2)} \, \dot{q}_2^2 + I_{zz_3}^{(2)} \, \dot{q}_1^2 \, s^2 q_2\right)}$$

$$\cancel{U_3 = m_3 g \left(L_1 + L_2 c q_2 + L_3 s q_2\right)}$$

$$\boxed{U_3 = m_3 g \left(l_1 + l_2 c q_2 + \left(q_3 - l_3/2\right) s q_2\right)}$$

$$K_3 = \frac{1}{2}\left[m_3 \left(l_2 s q_2 - \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right) c q_2\right)^2 + I_{xx_3}^{(2)} c^2 q_2 + I_{zz_3}^{(2)} s^2 q_2\right] \dot{q}_1^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left[m_3 \left[\left(q_3 - \frac{l_3}{2} - l_1 s q_2\right)^2 + \left(L_1 c q_2 - l_2\right)^2\right] + I_{yy_3}^{(2)}\right] \dot{q}_2^2$$
$$+ \frac{1}{2} m_3 \, \dot{q}_3^2 + m_3 \left(l_1 c q_2 - l_2\right) \dot{q}_2 \cdot \dot{q}_3$$

$i=1$

Link i	•	ENERGIAS	*	δ(.)/δq̇	d(*)/dt		δ(.)/δq
K_1	1	$\frac{1}{2} I_{zz_1} \dot{q}_1^2$	1	$I_{zz_1} \dot{q}_1$	$I_{zz_1} \ddot{q}_1$ Ⓐ	1	$\emptyset$
K_2	2	$\frac{1}{2}\left(m_2 \frac{l_2^2}{4} s^2 q_2 + I_{yy_2}\right)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_2^2 + I_{zz_2}\right)\dot{q}_2^2$	2	$\left(m_2 \frac{l_2^2}{4} s^2 q_2 + I_{yy_2}\right)\dot{q}_1$	$2 m_2 \frac{l_2^2}{4} s q_2 c q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \left(m_2 \frac{l_2^2}{4} s^2 q_2 + I_{yy_2}\right)\ddot{q}_1$ Ⓑ	2	$\emptyset$
K_3	3	$\frac{1}{2}\left[m_3\left(l_2 s q_2 - \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right)c q_2\right)^2 + I_{xx_3} c^2 q_2 + I_{zz_3} s^2 q_2\right]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_3\left[\left(q_3 - \frac{l_3}{2} - l_1 s q_2\right)^2\right.\right.$ *	3	$\left[m_3\left(l_2 s q_2 - \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right)c q_2\right)^2 + I_{xx_3} c^2 q_2 + I_{zz_3} s^2 q_2\right]\dot{q}_1$	$\left[2m_3\left(l_2 s q_2 - \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right)c q_2\right)\left(l_2 c q_2 \dot{q}_2 - \dot{q}_3 c q_2 + \left(q_3 - \frac{l_2}{2}\right) s q_2 \dot{q}_2\right)\right.$ Ⓒ ▲	3	$\emptyset$
U_1	4	$m_1 g\, l_1/2$	4	$\emptyset$	$\emptyset$	4	$\emptyset$
U_2	5	$m_2 g\left(l_1 + \frac{l_2}{2} c q_2\right)$	5	$\emptyset$	$\emptyset$	5	$\emptyset$
U_3	6	$m_3 g\left(l_1 + l_2 c q_2 + \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right) s q_2\right)$	6	$\emptyset$	$\emptyset$	6	$\emptyset$
1+2+3-4-5-6	7		7A		Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ	7B	$\emptyset$
7A-7B	8		8		7A (terminar)		

$* \; + \left(l_1 c q_2 - l_1\right)^2\Big] + I_{yy_3}\Big]\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_3^2 + m_3\left(l_1 c q_2 - l_1\right)\dot{q}_2 \dot{q}_3$

$▲ \; - 2 I_{xx_3} c q_2 s q_2 \dot{q}_2 + 2 I_{zz_3} s q_2 c q_2 \dot{q}_2\Big]\dot{q}_1 + \left[m_3\left(l_2 s q_2 - \left(q_3 - \frac{l_2}{2}\right)c q_2\right)^2 + I_{xx_3} c^2 q_2 + I_{zz_3} s^2 q_2\right]\ddot{q}_1$

$i=2$

Link i	•	ENERGIAS	*	δ(.)/δq̇	d(*)/dt		δ(.)/δq
K_1	1		1	$\emptyset$	$\emptyset$	1	$\emptyset$
K_2	2		2	$\left(m_2 l_2^2 + I_{zz_2}\right)\dot q_2$	$\left(m_2 l_2^2 + I_{zz_2}\right)\ddot q_2$	2	$m_2 \frac{l_2^2}{4} s q_2 c q_2 \dot q_1^2$
K_3	3		3	$\Big[m_3\Big(\left(q_3-\frac{l_3}{2}-l_1 s q_2\right)^2+\left(l_1 c q_2 - l_2\right)^2\Big) + \spadesuit$	$2m_3\Big[\left(q_3-\frac{l_3}{2}-l_1 s q_2\right)\left(\dot q_3 - l_1 c q_2 \dot q_2\right) - \left(l_1 c q_2 - l_2\right) l_1 s q_2 \dot q_2\Big]\dot q_2 + \blacksquare$	3	
U_1	4		4	$\emptyset$	$\emptyset$	4	$\emptyset$
U_2	5		5	$\emptyset$	$\emptyset$	5	$-m_2 g \frac{l_2}{2} s q_2$
U_3	6		6	$\emptyset$	$\emptyset$	6	$m_3 g\left(-l_2 s q_2 + \left(q_3-\frac{l_3}{2}\right) c q_2\right)$
1+2+3-4-5-6	7		7A		Terminar	7B	Terminar
7A-7B	8		8		Terminar		

$\spadesuit\; I_{yy_3}\Big]\dot q_2$

$\blacksquare\; \Big[m_3\Big(\left(q_3-\frac{l_3}{2}-l_1 s q_2\right)^2+\left(l_1 c q_2 - l_2\right)^2\Big)+I_{yy_3}\Big]\ddot q_2$

$i=3$

Link i	•	ENERGIAS	*	$\delta(.)/\delta\dot{q}$	d(*)/dt		$\delta(.)/\delta q$
K_1	1		1	Ø	Ø	1	Ø
K_2	2		2	Ø	Ø	2	Ø
K_3	3		3	$m_2\dot{q}_3 + m_3\left(l_1 c q_2 - l_2\right)\dot{q}_2$	$m_2\ddot{q}_3 - m_3 l_1 s q_2 \dot{q}_2^2 + m_3\left(l_1 c q_2 - l_2\right)\cdot\ddot{q}_2$	3	$-m_3\left(L_2 s q_2 - \left(q_3 - \frac{l_3}{2}\right) c q_2\right) c q_2 \dot{q}_1^2 + m_3\left(q_3 - \frac{l_3}{2} - l_1 s q_2\right)\dot{q}_2^2$
U_1	4		4	Ø	Ø	4	Ø
U_2	5		5	Ø	Ø	5	Ø
U_3	6		6	Ø	Ø	6	$m_3 g s q_2$
1+2+3-4-5-6	7		7A		Terminar	7B	Terminar
7A-7B	8		8		Terminar		